Optique – Chapitre 4

Superposition de N ondes lumineuses – TD

Exercice 1 : Formule des réseaux par réflexion

Un réseau par réflexion est constitué d'une succession de motifs réfléchissants la lumière qui sont régulièrement espacés.

On considère un réseau par réflexion de pas a éclairé dans l'air sous un angle d'incidence θ_0 par une source lumineuse monochromatique S située à l'infini. Les interférences sont observées sur un écran situé également à l'infini du coté de la source lumineuse.

1. Exprimer la différence de marche δ entre deux rayons lumineux réfléchis par des motifs successifs S_i et S_{i+1} en fonction de la direction θ de la réflexion sur le réseau.

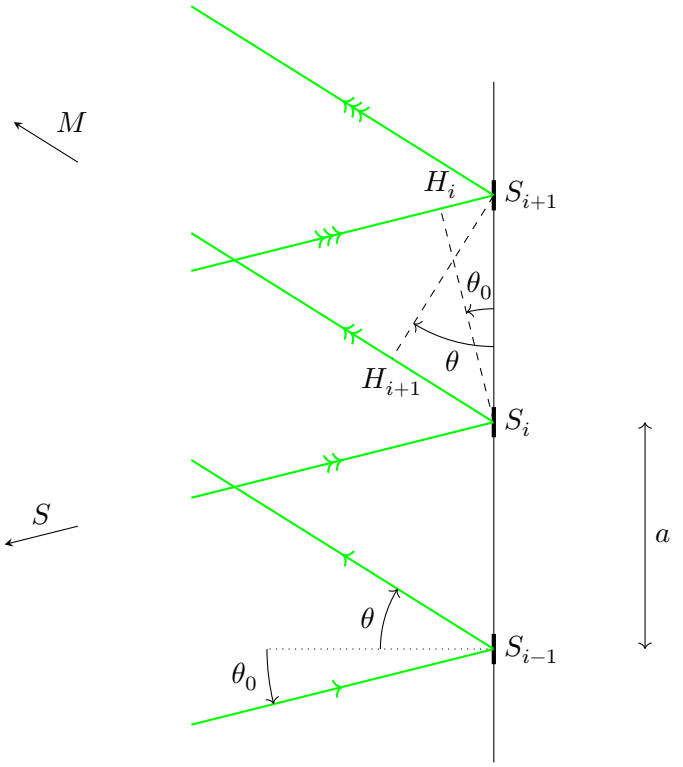
2. Montrer que la formule des réseaux par réflexion peut alors s'exprimer :

$$\sin\theta_p + \sin\theta_0 = \frac{p\,\lambda_0}{a}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$.

Correction :

1. On schématise la situation :



En notant H_i et H_{i+1} les projetés orthogonaux des fentes, on peut exprimer la différence de marche : $\delta = (SS_iM) - (SS_{i+1}M) = [(SS_i) + (S_iH_{i+1}) + (H_{i+1}M)] - [(SH_i) + (H_iS_{i+1}) + (S_{i+1}M)]$.

La source lumineuse S étant située à l'infini, l'onde est plane avant la réflexion sur le réseau, et on en déduit que les points S_i et H_i sont sur une même surface d'onde d'après le théorème de Malus, ainsi : $(SS_i) = (SH_i)$.

L'écran étant situé à l'infini, l'onde est plane après la réflexion sur le réseau, et on en déduit que les points S_{i+1} et H_{i+1} sont sur une même surface d'onde d'après le théorème de Malus, ainsi : $(S_{i+1}M) = (H_{i+1}M)$.

On obtient alors : $\delta = (S_iH_{i+1}) - (H_iS_{i+1}) = S_iH_{i+1} - H_iS_{i+1}$.

Pour exprimer ces distances géométriques, on peut remarquer que :

- pour le triangle $H_iS_iS_{i+1}$: $\sin\theta_0 = \dfrac{H_iS_{i+1}}{S_iS_{i+1}} = \dfrac{H_iS_{i+1}}{a}$, d'où : $H_iS_{i+1} = a\sin\theta_0$;
- pour le triangle $H_{i+1}S_{i+1}S_i$: $\sin(-\theta) = \dfrac{S_iH_{i+1}}{S_iS_{i+1}} = \dfrac{S_iH_{i+1}}{a}$ (comme $\theta < 0$), d'où : $S_iH_{i+1} = -a\sin\theta$;

d'où finalement : $\delta = -a(\sin\theta + \sin\theta_0)$.

2. On exprime l'ordre d'interférences correspondant : $p = \dfrac{\Delta\phi}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{2\pi\delta}{\lambda_0} = -\dfrac{a(\sin\theta + \sin\theta_0)}{\lambda_0}$.

Les directions θ_p après réflexion sur le réseau où les interférences entre ces deux ondes sont constructives vérifient la relation : $\sin\theta_p + \sin\theta_0 = -\dfrac{p\lambda_0}{a}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, que l'on peut écrire sous la forme : $\sin\theta_p + \sin\theta_0 = \dfrac{p\lambda_0}{a}$. En appliquant ce raisonnement entre chaque paire de motifs successifs du réseau, on en conclut que les directions θ_p après réflexion sur le réseau où les interférences entre les N ondes sont constructives vérifient la formule des réseaux par réflexion : $\sin\theta_p + \sin\theta_0 = \dfrac{p\lambda_0}{a}$, avec $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 : Minimum de déviation d'un réseau

On considère un réseau par transmission de pas a qui est éclairé dans l'air sous un angle d'incidence θ_0 par un faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde λ_0, et on note θ_p l'angle du faisceau d'ordre p en sortie du réseau.

En faisant varier l'angle d'incidence θ_0, on constate expérimentalement que la déviation $\Delta_p = \theta_p - \theta_0$ du faisceau d'ordre p présente deux minimums.

1. Montrer que ces minimums de déviation sont obtenus pour les angles d'incidence $\theta_{0,\min} = \pm\theta_p$.

2. En déduire que le minimum de déviation non-nul s'exprime :

$$\Delta_{p,\min} = 2\arcsin\left(\frac{p\lambda_0}{2a}\right).$$

On place un réseau de $n_0 = 1000$ traits par millimètre sur un goniomètre, que l'on éclaire par une lampe spectrale au sodium qui émet :

- une première raie jaune à la longueur d'onde $\lambda_0 = 589{,}0\,\text{nm}$;
- une seconde raie jaune à la longueur d'onde $\lambda_0' = 589{,}6\,\text{nm}$.

3. Déterminer le minimum de déviation $\Delta_{1,\min}$ pour l'ordre $p = 1$ correspondant à la première raie jaune.

4. Déterminer le minimum de déviation $\Delta'_{1,\min}$ pour l'ordre $p = 1$ correspondant à la seconde raie jaune.

5. Est-il possible de distinguer ces deux raies si la précision du goniomètre est d'une minute d'arc ?

Correction :

1. Les minimums de déviation correspondent à des angles $\theta_{0,\min}$ tels que : $\dfrac{\mathrm{d}\Delta_p}{\mathrm{d}\theta_0}(\theta_0 = \theta_{0,\min}) = 0$, avec $\Delta_p = \theta_p - \theta_0$ soit : $\dfrac{\mathrm{d}\theta_p}{\mathrm{d}\theta_0}(\theta_0 = \theta_{0,\min}) - 1 = 0$.

Pour exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\theta_p}{\mathrm{d}\theta_0}$, on utilise la formule des réseaux : $\sin\theta_p - \sin\theta_0 = \dfrac{p\lambda_0}{a}$, et on obtient en dérivant par rapport à θ_0 : $\dfrac{\mathrm{d}\theta_p}{\mathrm{d}\theta_0}\cos\theta_p - \cos\theta_0 = 0$, d'où : $\dfrac{\mathrm{d}\theta_p}{\mathrm{d}\theta_0} = \dfrac{\cos\theta_0}{\cos\theta_p}$.

Les minimums de déviation vérifient donc : $\dfrac{\cos\theta_{0,\min}}{\cos\theta_p} - 1 = 0$, soit : $\cos\theta_{0,\min} = \cos\theta_p$, d'où : $\theta_{0,\min} = \pm\theta_p$.

2. La déviation est nulle lorsque $\theta_{0,\min} = +\theta_p$, on s'intéresse donc au cas où $\theta_{0,\min} = -\theta_p$ pour lequel la déviation est : $\Delta_{p,\min} = 2\theta_p$.

On exprime θ_p à l'aide de la formule des réseaux : $\sin\theta_p - \sin(-\theta_p) = \dfrac{p\,\lambda_0}{a}$, soit : $\theta_p = \arcsin\left(\dfrac{p\,\lambda_0}{2\,a}\right)$, d'où : $\Delta_{p,\min} = 2\arcsin\left(\dfrac{p\,\lambda_0}{2\,a}\right)$.

3. Sachant que le pas du réseau s'exprime $a = \dfrac{1}{n_0}$, le minimum de déviation pour l'ordre $p = 1$ est : $\Delta_{1,\min} = 2\arcsin\left(\dfrac{\lambda_0\,n_0}{2}\right) = 34{,}26°$.

4. Le minimum de déviation pour l'ordre $p = 1$ est : $\Delta'_{1,\min} = 2\arcsin\left(\dfrac{\lambda'_0\,n_0}{2}\right) = 34{,}29°$.

5. On rappelle que $60' = 1°$, et on calcule la différence entre les deux déviations : $\Delta'_{1,\min} - \Delta_{1,\min} = 0{,}04° = 2'$, il est donc possible de distinguer ces deux longueurs d'onde à l'aide du goniomètre.

Exercice 3 : Mesure des angles d'émergence pour un réseau de diffraction

Un réseau par transmission de pas a constitué de N fentes fines parallèles est éclairé dans l'air sous un angle d'incidence θ_0 par une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 633\,\text{nm}$ située à l'infini.

À l'aide d'un goniomètre, on réalise les mesures des angles d'émergence θ_p en sortie du réseau pour différents ordres d'interférences p :

Ordre d'interférences p	$+2$	$+1$	-1	-2
Angle d'émergence θ_p	$63{,}10°$	$35{,}12°$	$-3{,}31°$	$-21{,}97°$

1. Rappeler la formule des réseaux reliant l'angle d'émergence θ_p à l'ordre d'interférences p.

2. À partir des mesures, déterminer l'angle d'incidence θ_0.

3. En déduire le pas a du réseau.

Le réseau est maintenant éclairé sous un angle d'incidence θ'_0 par une source monochromatique de longueur d'onde λ'_0. On mesure deux angles d'émergence successifs en sortie du réseau : $\theta'_k = 42{,}44°$ et $\theta'_{k+1} = 61{,}98°$, avec k un ordre d'interférences inconnu.

4. Déterminer la longueur d'onde λ'_0 de cette source.

Correction :

1. La formule des réseaux donne : $\sin\theta_p - \sin\theta_0 = \dfrac{p\,\lambda_0}{a}$, avec $p \in \mathbb{Z}$.

2. La formule des réseaux donne :

- pour l'ordre $p = +2$: $\sin\theta_{+2} - \sin\theta_0 = \dfrac{2\,\lambda_0}{a}$;
- pour l'ordre $p = -2$: $\sin\theta_{-2} - \sin\theta_0 = -\dfrac{2\,\lambda_0}{a}$.

La somme de ces deux équations donne : $\sin\theta_{+2} + \sin\theta_{-2} - 2\sin\theta_0 = 0$, d'où : $\theta_0 = \arcsin\left(\dfrac{\sin\theta_{+2} + \sin\theta_{-2}}{2}\right) = 15{,}00°$.

3. À partir de la formule des réseaux pour l'ordre $p = +2$ par exemple, on obtient : $a = \dfrac{2\,\lambda_0}{\sin\theta_{+2} - \sin\theta_0} = 2{,}00\,\mu\text{m}$.

4. La formule des réseaux donne :

- pour l'ordre k : $\sin\theta'_k - \sin\theta'_0 = \dfrac{k\,\lambda'_0}{a}$;
- pour l'ordre $k+1$: $\sin\theta'_{k+1} - \sin\theta'_0 = \dfrac{(k+1)\,\lambda'_0}{a}$.

La différence de ces équations donne : $\sin\theta'_k - \sin\theta'_{k+1} = -\dfrac{\lambda'_0}{a}$, d'où : $\lambda'_0 = a\,(\sin\theta'_{k+1} - \sin\theta'_k) = 415\,\text{nm}$.

Exercice 4 : Capacité de stockage d'un CD

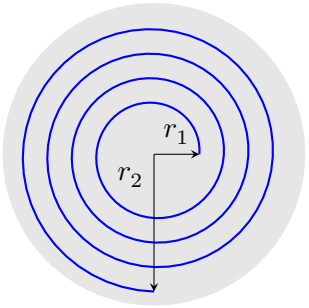
Un CD est un disque en polycarbonate sur lequel est gravé une piste en forme de spirale d'Archimède, dont l'équation en coordonnées polaires est :

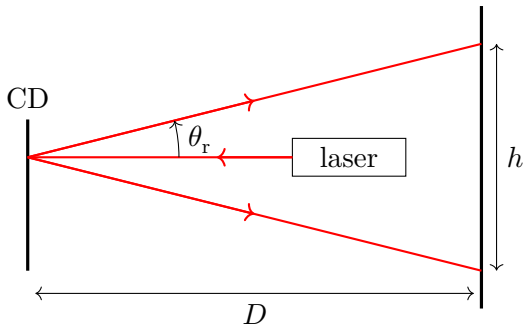
$$r(\theta) = r_1 + \frac{a}{2\,\pi}\,\theta$$

avec $r_1 < r < r_2$, où $r_1 = 22\,\text{mm}$ et $r_2 = 58\,\text{mm}$.

Lorsqu'un CD est éclairé par un laser en incidence normale, il se comporte comme un réseau par réflexion de pas a, et on peut montrer que les directions θ_r correspondant à des interférences constructives vérifient la formule des réseaux.

Pour un laser de longueur d'onde $\lambda_0 = 632\,\text{nm}$, les franges lumineuses correspondantes aux ordres $p = -1$ et $p = 1$ sont espacées d'une distance $h = 68\,\text{cm}$ sur un écran placé à une distance $D = 80\,\text{cm}$ dans l'air.





1. Déterminer le pas a du réseau.
2. Déterminer la longueur L de la spirale d'un CD par une intégration.
3. En supposant que la distance entre deux bits d'information le long de la piste est de l'ordre de la moitié de a, déterminer le nombre de bits d'information contenus sur un CD, puis en déduire sa capacité en mégaoctets (Mo).

Correction :

1. En incidence normale, la formule des réseaux pour l'ordre d'interférences $p = 1$ donne : $\sin\theta_\text{r} = \dfrac{\lambda_0}{a}$.

   Comme on peut exprimer : $\sin\theta_\text{r} = \dfrac{\frac{h}{2}}{\sqrt{D^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}$, on obtient : $a = \dfrac{2\,\lambda_0}{h}\sqrt{D^2 + \dfrac{h^2}{4}} = 1{,}6\,\mu\text{m}$.

2. En coordonnées polaires, on peut noter que la spirale débute en (r_1, θ_1) et finit en (r_2, θ_2), avec :
   - $r(\theta_1) = r_1 = r_1 + \dfrac{a}{2\,\pi}\,\theta_1$, d'où : $\theta_1 = 0$;
   - $r(\theta_2) = r_2 = r_1 + \dfrac{a}{2\,\pi}\,\theta_2$, d'où : $\theta_2 = \dfrac{2\,\pi}{a}\,(r_2 - r_1)$.

   La longueur de la spirale est donc donnée par intégration : $L = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(r_1 + \frac{a}{2\,\pi}\,\theta\right)\mathrm{d}\theta = \left[r_1\,\theta + \frac{a}{2\,\pi}\,\frac{\theta^2}{2}\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = r_1\,\theta_2 + \frac{a}{2\,\pi}\,\frac{\theta_2^2}{2} = \frac{\pi}{a}\,(r_2^2 - r_1^2) = 5{,}6\,\text{km}$.

3. Si la distance entre deux bits d'information est $\dfrac{a}{2}$, alors le CD contient un nombre de bits d'information : $N = \dfrac{L}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2\,L}{a} = 6{,}9.10^9$ bits.

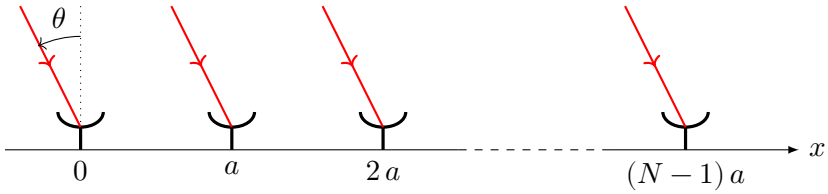
   Comme 1 Mo correspond à 8.10^6 bits, on obtient une capacité : $N = 8{,}8.10^2$ Mo, ce qui correspond bien à l'ordre de grandeur attendu (environ 700 Mo).

Exercice 5 : Radiotélescope VLA

Le *Very Large Array* (VLA) est un radiotélescope situé dans le Nouveau-Mexique, aux États-Unis. Il est formé de 27 antennes paraboliques, chacune d'un diamètre de 25 m, qui se déplacent sur une voie de chemin

de fer de 52 km. Les signaux reçus par chaque antenne sont transmis à un site central, où ils sont ensuite combinés afin de former une image haute résolution.

On modélise le VLA par un réseau unidimensionnel de N capteurs ponctuels, régulièrement espacés d'une distance a sur un axe horizontal (Ox), comme représenté ci-dessous. On suppose qu'une onde plane progressive de fréquence $f = 30\,\text{GHz}$ arrive sur le radiotélescope avec un angle θ par rapport à la verticale.



1. Calculer la longueur d'onde λ_0 de cette onde dans le vide, ainsi que la distance a entre deux capteurs.

On prend comme référence des phases le signal reçu par la première antenne située en $x = 0$, et on l'exprime en représentation complexe :

$$\underline{s}_1(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$$

avec A une constante.

2. Exprimer, en fonction de λ_0, a et θ, le déphasage Φ du signal reçu en $x = a$ par rapport à celui reçu en $x = 0$.

3. Pour quels angles θ les N signaux reçus interfèrent-ils constructivement ?

4. Exprimer les signaux $\underline{s}_2(t)$ à $\underline{s}_N(t)$ reçus par les antennes en fonction de $\underline{s}_1(t)$ et Φ, puis en déduire l'expression du signal somme $\underline{s}_{\text{tot}}(t)$ sous la forme d'une somme géométrique.

5. Montrer que l'intensité lumineuse correspondante peut s'exprimer :

$$I_{\text{tot}} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\,\Phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$$

avec I_0 une constante à exprimer en fonction A.

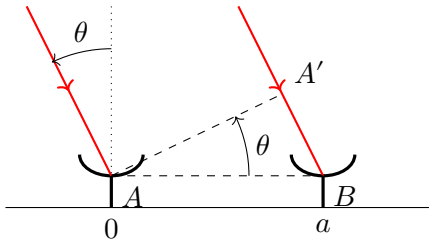
On définit la précision angulaire du radiotélescope comme le premier angle θ_0 à partir duquel l'intensité lumineuse I_{tot} s'annule.

6. Déterminer la précision angulaire du radiotélescope pour cette onde.

Correction :

1. La longueur d'onde est : $\lambda_0 = \dfrac{c_0}{f} = 10\,\text{mm}$, et la distance est : $a = \dfrac{52\,\text{km}}{N-1} = 2{,}0\,\text{km}$.

2. On représente la situation :



Comme les surfaces d'onde sont perpendiculaires aux rayons lumineux de l'onde plane d'après le théorème de Malus, on en déduit que les points A et A' sont sur une même surface d'onde. La différence de marche entre les deux rayons est alors : $\delta = (A'B) = a\sin\theta$, d'où l'expression du déphasage : $\Phi = \dfrac{2\,\pi}{\lambda_0}\,\delta = \dfrac{2\,\pi\,a\sin\theta}{\lambda_0}$.

3. Les signaux reçus par deux antennes successives interfèrent constructivement pour un déphasage : $\Phi = 2\,\pi\,p$, avec $p \in \mathbb{Z}$. En appliquant ce raisonnement entre chaque paire d'antennes successives, on en conclut que les N signaux interfèrent constructivement lorsque : $\dfrac{2\,\pi\,a\sin\theta_p}{\lambda_0} = 2\,\pi\,p$, soit pour des

angles : $\theta_p = \arcsin\left(\dfrac{p\,\lambda_0}{a}\right)$. On retrouve la formule des réseaux dans le cas d'une incidence normale.

4. Les signaux reçus s'expriment :

- pour la deuxième antenne : $\underline{s}_2(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\Phi)} = \underline{s}_1(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Phi}$;
- pour la troisième antenne : $\underline{s}_3(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-2\,\Phi)} = \underline{s}_1(t)\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{j}\,\Phi}$;
- ...
- pour la dernière antenne : $\underline{s}_N(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t-(N-1)\Phi]} = \underline{s}_1(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N-1)\Phi}$;

d'où le signal somme : $\underline{s}_{\text{tot}}(t) = \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t) + ... + \underline{s}_N(t) = \underline{s}_1(t)\left[1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Phi} + \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{j}\,\Phi} + ... + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N-1)\Phi}\right]$, soit : $\underline{s}_{\text{tot}}(t) = \underline{s}_1(t)\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Phi}\right)^n = \underline{s}_1(t)\,\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,N\,\Phi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Phi}}$.

5. En factorisant par l'angle moitié, on peut exprimer : $\underline{s}_{\text{tot}}(t) = \underline{s}_1(t)\,\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,N\,\Phi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Phi/2}}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,N\,\Phi/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,N\,\Phi/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Phi/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Phi/2}}$, soit : $\underline{s}_{\text{tot}}(t) = \underline{s}_1(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N-1)\Phi/2}\,\dfrac{\sin\left(\frac{N\,\Phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$, d'où l'expression de l'intensité lumineuse correspondante : $I_{\text{tot}} = \dfrac{1}{2}\,\underline{s}_{\text{tot}}\,\underline{s}^*_{\text{tot}} = \dfrac{1}{2}\,A^2\,\dfrac{\sin^2\left(\frac{N\,\Phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)} = I_0\,\dfrac{\sin^2\left(\frac{N\,\Phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$, en posant $I_0 = \dfrac{A^2}{2}$.

6. On peut exprimer : $I_{\text{tot}} = I_0\,\dfrac{\sin^2\left(\frac{N\,\pi\,a\sin\theta}{\lambda_0}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi\,a\sin\theta}{\lambda_0}\right)}$. Sachant que $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{N\,\pi\,a\sin\theta}{\lambda_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\,a\sin\theta}{\lambda_0}\right)} = \dfrac{\frac{N\,\pi\,a\sin\theta}{\lambda_0}}{\frac{\pi\,a\sin\theta}{\lambda_0}} = N \neq 0$, le premier angle θ_0 à partir duquel l'intensité lumineuse s'annule est tel que : $\dfrac{N\,\pi\,a\sin\theta}{\lambda_0} = \pi$, d'où : $\theta_0 = \arcsin\left(\dfrac{\lambda_0}{N\,a}\right) = 1{,}9.10^{-7}\,\text{rad}$.